توپولوژی چیست؟

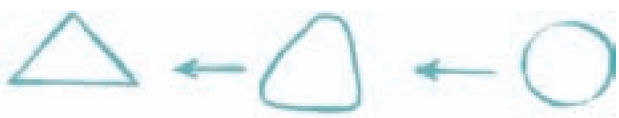
نازنین حسن‌نیا
عکاس: شادی رضائی

نوشیدن چای توی پیراشکی

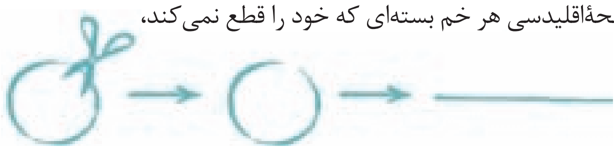
وقتی واژهٔ توپولوژی برای اولین بار به گوشم خورد، می‌دانستم که «لوژی» بعد از هر کلمه‌ای بیاید، به‌معنی بررسی‌کردن و شناختن آن است؛ و من تا مدتی به شوخی می‌گفتم تُپُل‌لوژی یعنی تپل شناسی؛ لابد یعنی علمی که به بررسی و شناخت تپل‌های عالم مشغول است. اما خُب! این فقط یک شوخی بود. توپولوژی[1] یکی از شاخه‌های ریاضیات است. در بخش اول این گفت و گو آقای دکتر کمالی‌نژاد و آقای دکتر افتخاری توضیحاتی دربارهٔ این شاخه از ریاضی می‌دهند. در بخش پایانی، آقای دکتر کمالی‌نژاد از لذت‌های ریاضی صحبت می‌کنند و از تجربه‌های شخصی‌شان دربارهٔ لذت بردن از ریاضی می‌گویند. اگر معمای «توپولوژی چیست؟» برای شما هم معمای جذابی است، یا نمی‌دانید چرا و چگونه افرادی به ریاضی عشق می‌ورزند با ما همراه شوید.

کمالی‌نژاد: می‌توان توپولوژی را به کمک زبانِ مجموعه‌ها، تعریف کرد که دانش‌آموزان در سال نهم با آن آشنا می‌شوند. یک توپولوژی روی یک مجموعه مانند X، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند T است که دارای تعدادی خاصیت مشخص است. یعنی یک مجموعهٔ X داریم و زیرمجموعه‌هایی از آن را که دارای خاصیت‌هایی هستند و گردایهٔ آن‌ها را T می‌نامیم. مجموعهٔ X به همراه توپولوژی T را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم. روشن است که این تعریف ناکامل است چون هنوز نگفته‌ام که آن خاصیت‌ها چه چیزهایی هستند. بنابراین این تعریف، شناخت چندانی از توپولوژی به دست نمی‌دهد و ممکن است که پرداختن به جزئیات آن نیز، این بحث را طولانی کند. اما با تغییر دادن موضوع و بدون پرداختن به جزئیات ریاضی، می‌توانم شما را اندکی بیشتر با توپولوژی آشنا کنم. توجه داشته باشید که به این ترتیب، با مفاهیم توپولوژیک به صورت مستقیم سروکار نداریم، بلکه شما را با بازی‌هایی ذهنی مواجه می‌کنم که با مفاهیمی در توپولوژی در ارتباط هستند.

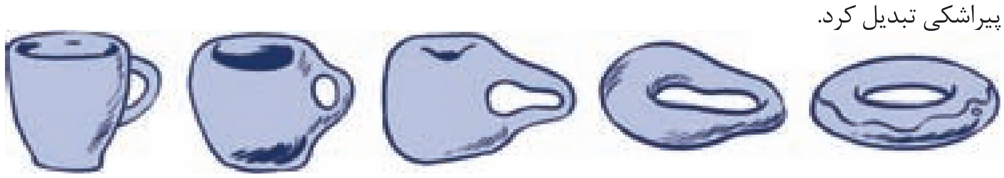
همین طور واژهٔ توپولوژی، نام شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن فضاها و سایر مفاهیم توپولوژیک مطالعه می‌شود. به تفاوت معنی واژهٔ۷ توپولوژی به‌عنوان حوزه‌ای از ریاضیات و توپولوژی به‌عنوان ساختاری روی یک مجموعه، توجه داشته باشید. به همین دلیل و از این پس، هر کجا که واژهٔ توپولوژی را به کار ببریم، مقصودمان همان بخش از ریاضیات است ولی در صورتی که بخواهیم به توپولوژی روی یک مجموعه اشاره کنیم، آن را «فضای توپولوژیک» خواهیم نامید تا ابهامی پیش نیاید. با این مقدمه، تصور کنید در دنیایی خیالی هستیم که همهٔ اشیاء در آن، از موادی کشسان و انعطاف‌پذیر ساخته شده‌اند. فرض کنید که می‌توانیم شکل این اشیاء را تحت قوانین زیر تغییر دهیم: هر قدر که بخواهیم می‌توانیم آن‌ها را خم کنیم، بپیچانیم، بکشیم و یا فشار دهیم. اما نمی‌توانیم آن‌ها را پاره کنیم و یا اجزایشان را به هم بچسبانیم. نام این نوع تغییر را «تغییر شکل پیوسته» می‌گذاریم. به‌عنوان مثال می‌توانیم با تغییر شکل پیوسته، مثلث را به دایره تبدیل کنیم.



همچنین فرض کنید که در این دنیای خیالی، بین اشیائی که با تغییر شکل پیوسته به هم تبدیل می‌شوند، تفاوتی قائل نباشیم. بنابراین در این دنیای خیالی، دایره و مثلث با هم تفاوتی ندارند زیرا با تغییر شکل پیوسته به هم تبدیل می‌شوند. تغییر شکل پیوسته در دنیای خیالی ما، با مفهومی به نام «همسان‌ریختی» در توپولوژی شباهت دارد. البته یکی گرفتن این دو، نادرست است. به عبارت دیگر؛ در توپولوژی، دایره و مثلث، به‌عنوان زیرفضاهای صفحهٔاقلیدسی (که خودش یک فضای توپولوژیک با توپولوژی ناشی از طول اقلیدسی است) به اصطلاح «همسان‌ریخت» هستند. به‌طور کلی در صفحهٔاقلیدسی هر خم بسته‌ای که خود را قطع نمی‌کند، با دایره «همسان‌ریخت» است!!! اما ... اگر یک نقطه، فقط یک نقطه را از یک دایره در صفحهٔاقلیدسی، حذف کنیم، آن‌گاه زیرفضای حاصل از حذف یک نقطه از یک دایره، با یک خط راست در صفحهٔاقلیدسی همسان‌ریخت خواهد بود.



می‌توانیم مثال دیگری را از تغییر شکل‌های پیوسته، این بار در فضای اقلیدسی سه بعدی در نظر بگیریم. شکل زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با تغییر شکل پیوسته در دنیای خیالی‌مان، یک فنجان را به یک پیراشکی تبدیل کرد.



ولی تغییر شکل پیوسته‌ای برای تبدیل نان باگت به پیراشکی وجود ندارد! به عبارت دیگر، دو زیرفضایِ فضای اقلیدسی سه بُعدی که مشـــابه فنجان و پیراشکی شکل بالا باشند، باهم همسان‌ریخت هستند اما زیرفضای مشابه پیراشکی شکل بالا و زیرفضایی مشابه نان باگت در فضای اقلیدسی سه بعدی با هم همسان‌ریخت نیستند! اما چگونه در توپولوژی ثابت می‌شود که دو شـــکل با هم همسان‌ریخت نیستند؟ در مورد بررسی همسان‌ریخت بودن فضاهایِ توپولوژیک، کار راحت‌تر است. به عنوان نمونه، یک روش این است که همسان‌ریختی میان آن فضاهای توپولوژیک را دقیقاً معرفی کنیم. مثلاً، به کمک تغییر شکل پیوسته‌ای که در دنیای خیالی‌مان بین فنجان و پیراشکی یافتیم، می‌توانیم یک همسان‌ریختی بین زیرفضاهای مشابه این دو شکل در فضای اقلیدسی سه بُعدی، معرفی کنیم. اما در مورد اثبات همسان‌ریخت نبودن زیرفضای مشابه پیراشکی و نان باگت، این روش راه‌گشا نیست. زیرا نامتناهی زیرفضای همسان‌ریخت با این دو زیرفضا وجود دارد- نامتناهی تغییرشکل پیوسته را در نظر بگیرید- و نمی‌توان تمام آن‌ها را آزمود و به این نتیجه رسیدکه همسان‌ریختی‌ای بین این دو وجود ندارد. پس راه‌حل چیست؟ ایدهٔ کلی اثبات در این جا چنین است: در این اشیاء، ویژگی یا شاخصی می‌یابیم که تحت همسان‌ریختی، حفظ شود. ممکن است که در مواردی این ویژگی به صورت یک عدد بیان شود. در این صورت اگر مقدار محاسبه شدهٔ این عدد برای این دو شیء متفاوت باشد، نتیجه می‌گیریم که همسان‌ریختی‌ای بین آن‌ها وجود ندارد. در مورد زیرفضای مشابه پیراشکی و نان باگت در فضای اقلیدســـی ســـه بُعدی، مفهوم گروه‌های همولوژی یا حتی ساده‌تر از آن‌ها، شاخص اویلر[۲]، ویژگی است که مسئله را حل می‌کند. البته ویژگی‌ها و شاخص‌های دیگری هم وجود دارند که به کمک آن‌ها می‌توان این پرسش را پاسخ گفت. در این‌جا شاخص اویلر زیرفضای مشابه پیراشکی برابر ۰ و شاخص اویلر زیرفضایی مشابه نان باگت برابر ۱ است. بنابراین همسان‌ریخت نبودن بین این دو، از این که شاخص‌های اویلرشان برابر نیستند (۰≠۱) نتیجه می‌شود.

افتخاری: پوانکاره[۳] حدود صد سال قبل به دنبال این ویژگی‌ها می‌گشت و با تلاش‌هایی که در این زمینه انجام داد اولین چیزی که ساخت، چیزی هست که امروز به آن گروه‌های هومولوژی می‌گویند. خلاصهٔ ماجرا این است که اگر شما گروه همولوژی یک شـــکل را بیابید و بعد آن شکل را به‌طور پیوســـته تغییر دهید، گروه همولوژی شکل جدید نیز دقیقاً همانند گروه همولوژی شکل اولیه است. یعنی به زبان توپولوژی شکل‌های «همسان‌ریخت» گروه‌های همولوژی یکسان دارند.

برهان: یواش یواش دارد از زبان توپولوژی خوشم می‌آید.

افتخاری: پوانکاره تلاش می‌کرد با ابزار جدیدی که کشف کرده بود، همسان‌ریختی اشیا مختلف، مانند کُره و فضای سه‌بُعدی را بررسی کند و حدس‌هایی می‌زد. در انتهای این مسیر خودش متوجه شد که حدس اولیه‌اش غلط است و فضاهایی پیدا کرد که با هم متفاوت بودند اما آن ابزارها نمی‌توانستند فضاها را از یکدیگر تشـــخیص دهند. بعد ابزارهای جدیدی پیدا کرد و حالا سؤال این بود که آیا این ابزارهای جدید به اندازهٔ کافی توانا هستند تا از پس تشخیص فضاهای غیرهمسان‌ریخت از یکدیگر بربیایند. نهایتاً حدس پوانکاره که یکی از مسائل با جایزهٔ میلیون دلاری بود در ابتدای قرن ۲۱ ثابت شد. همهٔ این اتفاقات صدسال به طول انجامید.

برهان: صد سال؟!؟

کمالی‌نژاد: بله. در ریاضیات برخی اوقات، برای آنکه به نتیجه برســـید باید صبور باشید. ریاضیات حوزه‌ای کهن است. به همین دلیل، انباشت مطالب در آن زیاد اســـت. یعنی معمولاً چیزهایی که لازم اســـت بیاموزید تا به مرزهای ریاضیات برســـید، زیاد هســـتند. معمولاً با مطالعهٔ چند صفحه–به‌عنوان مثال در ویکی‌پدیا- فـــرد نمی‌تواند در حوزه‌ای از ریاضیات تســـلط پیدا کند. البته ممکن است که یک مطالعهٔ کوتاه، نقطهٔ آغازی باشـــد. ولی واقعیت این اســـت که معمولاً فرد باید چند کتاب را مطالعه کند تا با مفاهیم اساســـی در یک حوزهٔ ریاضیات آشنا شـــود و در ادامه هم نیاز است تا مقاله‌های پژوهشـــی به‌روزتری را مطالعه کند تا بتواند به مرزهای ریاضیات نزدیک شود. منتها معنی آن این نیست که ریاضی خواندن کسالت بار و بی‌مزه است. این سفری


دکتر ایمان افتخاری


دکتر علی کمالی‌نژاد

است که در طول مسیر هم می‌توانید از آن لذت بسیار ببرید. درست است که با مطالعه و یادگیری مطالب ریاضی از پیش نوشته شده، شما در راهی وارد می‌شوید که پیش از شما پیموده شده است. اما این مسیر برای کسی که برای اولین بار آن را طی می‌کند نیز می‌تواند بسیار هیجان انگیز باشد. در ضمن در مسیر آموختن مطالب جدید ریاضی، اگر حوصله به خرج بدهید و به اندازهٔ کافی صبور باشید، می‌توانید ماجراجویی‌های جدیدی را تجربه و زیبایی‌های شگفت انگیزی را مشاهده کنید. به قول خانم دکتر مریم میرزاخانی: «زیبایی ریاضیات خود را تنها به شاگردان صبور نشان می‌دهد.[۴]»

برهان: بعضی افراد خاطرات خوبی از حل مسئله‌های ریاضی در دوران مدرسه دارند، یا مثلاً می‌گویند وقتی یک مسئلهٔ سخت ریاضی حل می‌کنند هیجان‌زده می‌شوند و از نتیجهٔ کارشان لذت می‌برند. یعنی انگار تا پیش از رسیدن به سطوح بالای دانش و پژوهش هم این لذت بردن از ریاضی وجود دارد.

کمالی‌نژاد: حق با شماست. لذت بردن از ریاضی می‌تواند در هر سطحی اتفاق بیفتد. فکر می‌کنم که می‌توان راه‌حل گاوس برای جمع کردن اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ را برای بسیاری از افراد، حتی اگر با ریاضیات سروکار نداشته باشند، توضیح داد. دنبال کردن مراحل اثبات اقلیدس برای نامتناهی بودن اعداد اول، به دانش ریاضی چندانی نیاز ندارد. هندسه، نظریهٔ اعداد، احتمال، حسابان، ریاضیات گسسته و... در دورهٔ دبیرستان سرشار از مطالب و مسئله‌های جالب هستند. اساساً تعدادی از ریاضی‌دانان با لمس لذت ریاضی ورزیدن و حل مسئله در دوره‌های پیش از دانشگاه، تصمیم می‌گیرند تا به صورت حرفه‌ای به ریاضیات بپردازند.

فکر می‌کنم، امکان سرگرم شدن و لذت بردن از ریاضیات به گروه خاصی محدود نمی‌شود. حتی مطالعهٔ کتاب‌های ریاضی نه چندان پیشرفته هم می‌تواند هیجان‌انگیز باشد. البته فعالیت پژوهشی هم دشواری‌ها و هیجان‌های مختص به خود را دارد. در مورد پژوهش و فعالیت ریاضی مطلب دیگری از خانم دکتر میرزاخانی به خاطرم می‌رسد: «پرارزش‌ترین بخش، لحظه‌ای است که می‌گویی آها! ذوق کشف و لذت فهمیدن چیزی جدید. احساس ایستادن بالای یک بلندی و رسیدن به دیدی شفاف و واضح.»

برهان: به قول شما هرچه بیشتر وارد دنیای ریاضی شوید، زیبایی‌های بیشتری در این دنیا می‌بینید.

کمالی‌نژاد: بله. البته به قول ریاضی‌دان انگلیسی، آرتور کِیلی[۵]: «در هر چیز، از جمله یک نظریهٔ ریاضی، زیبایی را می‌توان درک کرد ولی نمی‌توان آن را توضیح داد.»

پی‌نوشت‌ها:

۱. توپولوژی از ترکیب دو واژهٔ یونانی τόπος (توپوس) به معنی مکان و λόγος (لوگوس) به معنی مطالعه، پدید آمده است. بنابراین توپولوژی در لغت، به معنی «مکان‌شناسی» است.

۲. شاخص اویلر، عددی است که برای بعضی شکل‌ها تعریف می‌شود. برای آشنایی بیشتر، به وبلاگ اختصاصی مجله مراجعه کنید.

۳. ریاضی‌دان فرانسوی قرن ۱۸ میلادی که از بنیان‌گذاران شاخهٔ توپولوژی در ریاضیات است.

۴. برگرفته از مصاحبهٔ ایشان که در گزارش سالیانه موسسه ریاضی کلی - سال ۲۰۰۸ - چاپ شده است. به آدرس زیر مراجعه کنید:
http://www.claymath.org/library/annual_report/ar2008/08Interview.pdf

5. Arthur Cayley